04/03/2019

$f: E \to E$ ενδομορφισμός του $\mathbb{K}$-διανυσματικού χώρου E και $\dim_{\mathbb{K}} E = n$

Έστω β: βάση του E και $A = M_{\beta}^{\beta}(f)$. Τότε:

$P_f(t) = |A - t I_n| = (-1)^n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0 \in \mathbb{K}[t]$ καλείται χαρακτηριστικό πολυώνυμο του f. Τότε $a_0 = |A|$

Ρίζες του $P_f(t)$ στο σώμα $\mathbb{K} \equiv$ ιδιοτιμές του f.

Για κάθε ιδιοτιμή λ του f: $V(\lambda) = \{ x_1 \vec{e_1} + \dots + x_n \vec{e_n} \in E / X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ είναι λύση του ομογενούς συστήματος $(\Sigma): (A - \lambda I_n) \cdot X = 0 \}$

<u>Πρόταση</u>: Ιδιοδιανύσματα του f τα οποία αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές του f είναι Γ.Α.

<u>Απόδειξη</u>: Έστω $\vec{x_1}, \vec{x_2}, \dots, \vec{x_n}$ ιδιοδιανύσματα του f τα οποία αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ του f, όπου $\lambda_i \neq \lambda_j$, $1 \leq i, j \leq m$

Θα δειχθεί με επαγωγή στο m, ότι τα $\vec{x_1}, \dots, \vec{x_m}$ είναι Γ.Α

- Για $m = 1$: το $\vec{x_1}$ είναι Γ.Α διότι είναι μη-μηδενικό ως ιδιοδιάνυσμα.
- <u>Επαγωγική υπόθεση</u>: $m-1$ το πλήθος ιδιοδιανύσματα του f, τα τα οποία αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι Γ.Α

<u>Γενική Περίπτωση</u>: Έστω ότι $k_1 \vec{x_1} + k_2 \vec{x_2} + \dots + k_m \vec{x_m} = \vec{0}$ ①

Τότε $f(k_1 \vec{x_1} + k_2 \vec{x_2} + \dots + k_m \vec{x_m}) = \vec{0} \Rightarrow$

$\Rightarrow k_1 f(\vec{x_1}) + k_2 f(\vec{x_2}) + \dots + k_m f(\vec{x_m}) = \vec{0} \Rightarrow$

$\Rightarrow k_1 \lambda_1 \vec{x_1} + k_2 \lambda_2 \vec{x_2} + \dots + k_m \lambda_m \vec{x_m} = \vec{0}$ ②

Πολλαπλασιάζουμε την ① με λ_1: $k_1 \lambda_1 \vec{x_1} + k_2 \lambda_1 \vec{x_2} + \dots + k_m \lambda_1 \vec{x_m} = \vec{0}$ ③

② - ③: $k_2(\lambda_2 - \lambda_1)\vec{x_2} + \dots + k_m(\lambda_m - \lambda_1)\vec{x_m} = \vec{0}$

Από την επαγωγική υπόθεση $\Rightarrow k_2(\lambda_2 - \lambda_1) = \dots = k_m(\lambda_m - \lambda_1) = 0$

Επειδή $\lambda_i \neq \lambda_j$, $1 \leq i, j \leq m$ θα έχουμε $\lambda_i - \lambda_1 \neq 0$, $\forall i = 2, \dots, m$ και άρα $k_2 = \dots = k_m = 0$.

Τότε από την ①: $k_1 \vec{x_1} = \vec{0}$. Επειδή το $\vec{x_1} \neq \vec{0}$ ως ιδιοδιάνυσμα έπεται ότι $k_1 = 0$.

Άρα $k_i = 0$, $1 \leq i \leq m$ και άρα τα $\vec{x_1}, \vec{x_2}, \dots, \vec{x_m}$ είναι Γ.Α

Πόρισμα: Εστω $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ ανα δύο διαφορετικές ιδιοτιμές του f. Τότε το άθροισμα $V(\lambda_1)+V(\lambda_2)+\dots+V(\lambda_m)$ είναι ευθύ.

Απόδειξη: Αρκεί να δειχθεί ότι $\vec{x_1}+\vec{x_2}+\dots+\vec{x_m}=\vec{0}$ όπου $x_i \in V(\lambda_i)$, $1 \le i \le m$, τότε $\vec{x_i}=\vec{0}$, $\forall i=1,2,\dots,m$. Αν κάποια απο τα διανύσματα $\vec{x_1},\dots,\vec{x_m}$ είναι $\neq \vec{0}$ τότε αυτά θα είναι ιδιοδιανύσματα του f, τα οποία θα αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές. Τότε απο την παραπάνω πρόταση αυτά τα διανύσματα θα είναι Γ.Α και αυτό είναι άτοπο, διότι έχουν άθροισμα ίσο με $\vec{0}$. Άρα όλα τα $\vec{x_i}=\vec{0}$.

→ Εστω λ ιδιοτιμή του f. Τότε λ ρίζα του $P_f(t)$.

- Η __αλγεβρική πολλαπλότητα__ της λ ορίζεται να είναι η πολλαπλότητα της λ ως ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου.
- Η __γεωμετρική πολλαπλότητα__ της λ ορίζεται να είναι η διάσταση $\dim_K V(\lambda)$

Πρόταση: Για κάθε ιδιοτιμή λ του f:

$$1 \le \dim_K V(\lambda) \le s := \text{αλγεβρική πολλαπλότητα της } \lambda.$$

Απόδειξη: Επειδή $V(\lambda) \neq \{\vec{0}\}$ έπεται ότι $\exists\, \vec{0} \neq \vec{x} \in V(\lambda) \Rightarrow$
$\Rightarrow \dim_K V(\lambda) \ge 1$.

Εστω $\dim_K V(\lambda) = m$ και έστω $\{\vec{e_1},\dots,\vec{e_m}\}$ βάση του $V(\lambda)$, τότε επεκτείνουμε τη βάση $\{\vec{e_1},\dots,\vec{e_m}\}$ του $V(\lambda)$ σε μια βάση του E: $\beta=\{\vec{e_1},\vec{e_2},\dots,\vec{e_m},\vec{e_{m+1}},\dots,\vec{e_n}\}$

$$f(\vec{e_1}) = \lambda\vec{e_1} + 0\vec{e_2} + \dots + 0\vec{e_m} + 0\vec{e_{m+1}} + \dots + 0\vec{e_n}$$
$$f(\vec{e_2}) = 0\vec{e_1} + \lambda\vec{e_2} + \dots + 0\vec{e_m} + 0\vec{e_{m+1}} + \dots + 0\vec{e_n}$$
$$\vdots$$
$$f(\vec{e_m}) = 0\vec{e_1} + 0\vec{e_2} + \dots + \lambda\vec{e_m} + 0\vec{e_{m+1}} + \dots + 0\vec{e_n}$$
$$f(\vec{e_{m+1}}) = a_{1,m+1}\vec{e_1} + \dots + a_{m,m+1}\vec{e_m} + a_{m+1,m+1}\vec{e_{m+1}} + \dots + a_{n,m+1}\vec{e_n}$$
$$\vdots$$
$$f(\vec{e_n}) = a_{1n}\vec{e_1} + \dots + a_{m,n}\vec{e_m} + a_{m+1,n}\vec{e_{m+1}} + \dots + a_{nn}\vec{e_n}$$

$$A = M_{\beta}^{\beta}(f) = \left(\begin{array}{cccc|ccc} \lambda & 0 & \dots & 0 & a_{1,m+1} & \dots & a_{1n} \\ 0 & \lambda & \dots & 0 & a_{2,m+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & B & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & a_{m,m+1} & \dots & a_{mn} \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & a_{m+1,m+1} & \dots & a_{m+1,n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \Gamma & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n,m+1} & \dots & a_{nn} \end{array}\right)$$

$P_f(t) = (\lambda - t)^m \, |\Gamma - tI_{n-m}|$

Θέτουμε $Q(t) = |\Gamma - tI_{n-m}|$ και τότε το $Q(t)$ πολυώνυμο βαθμού $n-m$ και τότε $Q(t) = (\lambda - t)^p R(t)$ όπου $p \geq 0$ και $(\lambda - t) \nmid R(t)$

Σημαντική ιδιότητα διαγωνοποιήσεως πινάκων: Υπολογισμός m-οστής δύναμης πίνακα. Αν A: διαγωνοποιήσιμος $\Rightarrow$ $\exists$ αντιστρέψιμος πίνακας P:

$$P: P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^m = P \begin{pmatrix} \lambda_1^m & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^m \end{pmatrix} P^{-1}$$

Παράδειγμα: $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (x+y+2z, -x+2y+z, y+3z)$

$\beta = \{\vec{e_1} = (1,0,0), \vec{e_2} = (0,1,0), \vec{e_3} = (0,0,1)\}$ κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$

$$A = M_{\beta}^{\beta}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Τότε: $P_f(t) = |A - tI_3| = \begin{vmatrix} 1-t & 1 & 2 \\ -1 & 2-t & 1 \\ 0 & 1 & 3-t \end{vmatrix} =$

$$=(1-t)\big((2-t)(3-t)-1\big)+(3-t-2)=$$
$$=(1-t)\big((2-t)(3-t)-1\big)+(1-t)=$$
$$=(1-t)(2-t)(3-t)$$

Άρα ιδιοτιμές της f είναι: $\begin{cases} \lambda_1=1 & \text{πολ/τας } 1 \\ \lambda_2=2 & \text{πολ/τας } 1 \\ \lambda_3=3 & \text{πολ/τας } 1 \end{cases}$

Τότε το άθροισμα $V(1)+V(2)+V(3)$ είναι ευθύ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}}(V(1)+V(2)+V(3))=\dim_{\mathbb{R}}V(1)+\dim_{\mathbb{R}}V(2)+\dim_{\mathbb{R}}V(3)=$$
$$=1+1+1=3$$

Άρα $\mathbb{R}^3=V(1)\oplus V(2)\oplus V(3)$

Αν $\vec{e_i}$ βάση του $V(i)$, $1\leq i\leq 3$ τότε $e=\{\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}\}$ βάση του $\mathbb{R}^3$

και $M_e^e(f)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ και άρα ο ενδομορφισμός f είναι διαγωνοποιήσιμος.